CONTROLLES ALGEBRE II SMPC FSSM

ABDEL THAMI

9,5 Contrôle ALGEBRE SMPC S2

Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences Semlalia
Département de mathématiques

Année Universitaire 2014 – 201
SMPC Contrôle d'Algèbre I
Durée : 2 heures

Nom ....
Prénom ....
N⁰ de Table..
N⁰ d'Apogée..

Exercice 1.Mettre une croix ☐ pour la réponse vraie.Lorsque la réponse est fausse, on justifiera dans l'espace en pointillés.

1pt 1) $E = \mathbb{R}^3$ et $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y - z \geq 0\}$ est un sous-espace vectoriel de E. ☐V ☒F.

$(1,3,2) \in H$, mais $-1.(1,3,2) \notin H$

0,5pt 2) $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $H = \{P \in \mathbb{R}_2[X] / P + P' = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de E. ☒ V ☐ F.

Exercice 2.Mettre une croix ☐ pour la réponse exacte.La bonne réponse est unique pour chaque question.

1) $E = \mathbb{R}_2[X]$ est muni de sa base canonique $(1, X, X^2)$. La famille $B = \{a + 2X, X + X^2, -2 + aX^2\}$ où $a \in \mathbb{R}$ est une base de E si :

1 pt ☐ $a = 2$ ☐ $a \neq -2$ ☐ $a = -2$ ☐ $a \neq 2$ ☒ $a \notin \{-2, 2\}$ ✓

2) Dans $E = \mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $u = (1, 1, m-1)$, $v = (1, m-1, 1)$ et $w = (m-1, 1, 1)$ où $m \in \mathbb{R}$.

(i) Le rang de la famille $B = (u, v, w)$ est égal à 1 si :

0,5pt ☐ $m = -1$ ☒ $m = 2$ ☐ $m \in \{-1, 2\}$ ☐ $m \neq 2$ ☐ $m \notin \{-1, 2\}$?

(ii) $\dim \mathrm{vect}(u, v, w) = 2$ si :

0,5pt ☐ $m \neq -1$ ☐ $m = 2$ ☐ $m \in \{-1, 2\}$ ☒ $m = -1$ ☐ $m \notin \{-1, 2\}$

(iii) $E = \mathrm{vect}(u, v, w)$ si :

0,5pt ☐ $m = -1$ ☐ $m = 2$ ☐ $m \in \{-1, 2\}$ ☐ $m \neq 2$ ☒ $m \notin \{-1, 2\}$

1

3) L'espace $E = \mathbb{R}_2[X]$ est muni de sa base canonique $B_c = (1, X, X^2)$. Soit f l'endomorphisme de E défini par $f(a + bX + cX^2) = (2a + b + c) + (a + b)X - (a + c)X^2$ où a, b et $c \in \mathbb{R}$.

(i) La matrice de f relativement à la base B_c est

pt ☐ $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ☒ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(ii) Le sous-espace vectoriel $\mathrm{Ker} f$ est

pt ☐ $\mathrm{vect}(-1, -X + X^2)$ ☒ $\mathrm{vect}(1 - X - X^2)$ ☐ $\mathrm{vect}(-1 + X - X^2)$ ☐ $\{0_E\}$.

(iii) Le sous-espace vectoriel $Im f$ est

t ☐ $\mathrm{vect}(1 - X, 1 + X^2)$ ☐ $\mathrm{vect}(1 + X - X^2)$ ☒ $\mathrm{vect}(1 + X, 1 - X^2)$ ☐ $\mathrm{vect}(1 + X + X^2)$.

(iv) Soit la base $B = (1, 1 - X, (1 - X)^2)$ de E.Soit P la matrice de passage de B_c à B.

(a) La matrice P^{-1} est égale à

t ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ☒ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

(b) La matrice de f relativement à la base B est

☐ $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ☒ $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 5 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

(c) Soit $P = 3 + 2X - X^2 \in E$.

(c_1) Le vecteur des coordonnées de P relativement à B est

,5pt ☐ $(-4, -1, -1)$ ☐ $(4, 0, 1)$ ☐ $(4, 1, -1)$ ☒ $(4, 0, -1)$ ☐ $(4, 1, 0)$

(c_2) Le vecteur des coordonnées de $f(P)$ relativement à B est

,5pt ☐ $(10, 9, -1)$ ☐ $(-10, -1, -6)$ ☒ $(10, -1, -2)$ ☐ $(-10, -1, 2)$ ☐ $(10, 1, 2)$

Exercice 3. Soit $E = \mathbb{R}^3$ rapporté à sa base canonique $B_c = (e_1, e_2, e_3)$.On considère les sous-espaces vectoriels $F = \{(x, y, z) / 2x - y - z = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) / x - y - z = 0\}$ de E.

1) Déterminer $F \cap G$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....

SMPC ALGEBRE II
Correction du contrôle final (Juin 2015)

d F = ..

Exercice 3. (4,5 points)

1. $F \cap G = \mathrm{vect}\{(0,1,-1)\}$ 1 pt

2. $F = \mathrm{vect}\{(1,2,0),(0,-1,1)\}$ et $\dim F = 2$ 0,5 pt

   $G = \mathrm{vect}\{(1,1,0),(1,0,1)\}$ et $\dim G = 2$ 0,5 pt

   $\dim F + G = \dim F + \dim G - \dim F \cap G = 3$ donc $F + G = E$. 1 pt

3. $H \cap G = \{(0,0,0)\}$ 1 pt

   $\dim E = \dim H + \dim G$ 0,5 pt

Exercice 4. (6 points)

1. Le calcul du polynôme caractéristique nous donne : $\lambda_1 = b$ *et* $\lambda_2 = b + 4$ 1 pt

2. $E_b = \mathrm{vect}(v_1, v_2)$ 1pt et $E_{b+4} = \mathrm{vect}(v_3)$ 1 pt

3. $\dim E_b = 2 =$ ordre de multiplicité de la valeur propre b 0,5 pt

4. $P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 1 pt

5. $(A_1)^n = P\,(D_1)^n\,P^{-1}$ avec $D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ 0,5 pt

   Le calcul nous donne : $(A_1)^n = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3+5^n & -2+2\times 5^n & -1+5^n \\ -1+5^n & 2+2\times 5^n & -1+5^n \\ -1+5^n & -2+2\times 5^n & 3+5^n \end{pmatrix}$ 1 pt

2

Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences Semlalia
Département de Mathématiques
Marrakech

Année universitaire : 2013/2014
Filière : SMPC – S2

Contrôle 1-Epreuve d'algèbre II

Durée : 1h 30 (26 Avril 2014)

Exercice 1. Répondre aux questions suivantes en justifiant chacune de vos réponses :

1. L'ensemble $F = \{ P \in \mathbb{R}_2[X] \,/\, P''(0) = 0 \}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$?
2. L'ensemble $F = \left\{ \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} / a \in \mathbb{R} \right\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$?
3. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, le vecteur $u = (1, 1, 1)$ appartient-il au sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $v = (1, -1, 0)$ et $w = (-1, 1, -1)$?

$2+1$ $\dim \mathbb{R}_2[X] = 3$ $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$ $\dim \mathbb{R}^n = n$ $\dim M_n[\mathbb{R}] = n$

Exercice 2. L'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_2[X]$ est rapporté à sa base canonique $B = (1, X, X^2)$.
On définit les sous-ensembles de E suivants :

$$F = \{ P = a + bX + cX^2 \in E \,/\, c = a + b \} \text{ et } G = \{ P \in E \,/\, P(2) = P(-2) = 0 \}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E. En donner une base et la dimension.
2. Soit $P_0 = -4 + X^2 \in E$. Montrer que $G = \mathrm{Vect}\{P_0\}$ puis en donner une base et la dimension.
3. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.
4. On considère les vecteurs de E suivants :
$$P_1 = 1 + X + X^2, \quad P_2 = 1 - X + 2X^2, \quad P_3 = 2 + 3X^2 \quad \text{et} \quad P_4 = -2X + X^2.$$
On définit dans E la famille $S = (P_1, P_2, P_3, P_4)$ et le sous-espace vectoriel $H = \mathrm{Vect}\, S$.
   - (a) Calculer rg S.
   - (b) En déduire que $H = \mathrm{Vect}\{P_1, P_2\}$.
   - (c) Sans calculer $F \cap H$, vérifier que F et H ne sont pas supplémentaires dans E.
   - (d) Déterminer $F \cap H$ et en déduire que $E = F + H$.

Exercice 3. L'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ est rapporté à sa base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$.
On considère l'application $f_\beta : E \to E$ définie par :

$$\forall (x, y, z) \in E \quad f_\beta(x, y, z) = (3x + y,\ \beta x - y,\ x - z) \text{ avec } \beta \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que f_β est un endomorphisme de E.
2. Ecrire la matrice A_β de f_β relativement à la base B.
3. En discutant suivant les valeurs du paramètre β, déterminer :
   - (a) $\mathrm{Ker}\, f_\beta$ puis en déduire $\mathrm{rg}\, f_\beta$.
   - (b) Une base de $\mathrm{Im}\, f_\beta$.

14 13
7,5 5,5 10 12,5
5,5 10 7,5

Barème : Exercice 1 : 3,5 points Exercice 2 : 10,5 points Exercice 3 : 6 points

3 14 16 14 16

Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences Semlalia
Département de Mathématiques
Marrakech

Année universitaire : 2013/2014
Filière : SMPC – S2

Corrigé du contrôle 1 d'algèbre II

Exercice 1. (3,5 points)

1. F est un s.e.v de $IR_2[X]$ (1,5pt)
2. F n'est pas un s.e.v de $M_2(IR)$: par exemple, on a $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \in F$ mais $-1.\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \notin F$. (1pt)
3. $u \notin$ Vect (v , w) car si on écrit u = a.v + b.w, on aboutit à une contradiction. (1pt)

تناقض

Exercice 2. (10,5 points)

1. F = Vect ($1 + X^2$, $X + X^2$), F est donc un s.e.v de E. (1pt)
   ($1 + X^2$, $X + X^2$) est donc une base de F (car libre : $\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix} \neq 0$) et dim F = 2. (0,5 pt)
2. $P = a + bX + cX^2 \in G \Leftrightarrow a + 2b + 4c = 0$ et $a - 2b + 4c = 0 \Leftrightarrow b = 0$ et $a = -4c$.
   D'où $G = \{c(X^2-4) / c \in IR\} = \text{Vect}\{P_0\}$. (1pt)
   $\{P_0\}$ est donc une base de G et dim G = 1. (0,5 pt)
3. Calcul de $F \cap G$: soit $P = a + bX + cX^2 \in F \cap G$.
   $P \in G$ donc $P = d(-4 + X^2)$ avec $d \in IR$. Comme $P \in F$, on en déduit : $d = -4d$.
   D'où $d = 0$ et $F \cap G = \{0_E\}$. (1pt)
   D'autre part, on a : dim F + dim G = dim E. F et G sont donc supplémentaires dans E. (0,5 pt)
4. (a) On utilise la méthode de Gauss :

$$\begin{pmatrix}1&1&2&0\\1&-1&0&-2\\1&2&3&1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1&1&2&0\\0&-2&-2&-2\\0&1&1&1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1&1&2&0\\0&-2&-2&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

D'où rg S = 2 (1,5pt)

(b) Comme dim H = rg S = 2 et $\{P_1, P_2\}$ est libre ($\begin{vmatrix}1&1\\1&-1\end{vmatrix} \neq 0$), il en résulte $H = \text{Vect}\{P_1, P_2\}$. (1pt)

(c) Comme dim E ≠ dim F + dim H, F et H ne sont donc pas supplémentaires dans E. (1pt)

20

(d) Calcul de $F \cap H$: soit $P = a + bX + cX^2 \in F \cap H$.
$P \in H$ donc $P = \alpha P_1 + \beta P_2 = \alpha + \beta + (\alpha - \beta)X + (\alpha + 2\beta)X^2$ ($\alpha, \beta \in IR$).
Comme $P \in F$, on en déduit : $(\alpha + 2\beta) = \alpha + \beta + \alpha - \beta$ c'est-à-dire : $\alpha = 2\beta$.
Doù $F \cap H = \text{Vect}(2P_1 + P_2) = \text{Vect}(3 + X + 4X^2)$. (1pt)
$\{3 + X + X^2\}$ est donc une base de $F \cap H$ et dim $F \cap H$ = 1. (0.5pt)

On a : dim F + H = dim F + dim H – dim $F \cap H$ = 2 + 2 – 1 = 3.
F + H est un s.e.v de E de même dimension que E d'où E = F + H. (1pt)

Exercice 3. (6 points)

1. f_β est un endomorphisme de E. (1pt) → car (E → E) l'espace de depart (E) égale l'espace d'arivée
2. $A_\beta = \begin{pmatrix}3&1&0\\\beta&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}$. (1pt)
3. (a) $(x, y, z) \in \text{Ker} f_\beta \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3x \\ (\beta+3)x = 0 \\ x = z \end{cases}$ (0.5pt)

   2 cas se dégagent :

   (i) Si $\beta \neq -3$, on a : Ker $f_\beta = \{(0,0,0)\}$ et alors rg f_β = 3. (0.5pt + 0.5pt)

   (ii) Si $\beta = -3$, on a : Ker $f_{-3} = \text{Vect}\{(1,-3,1)\}$ et alors rg f_{-3} = 2. (0.5pt + 0.5pt)

   (b) Si $\beta \neq -3$, on a : dim Im f_β = rg f_β = 3. On en déduit : Im f_β = E (ou encore Im f_β = Vect ($f(e_1)$, $f(e_2)$, $f(e_3)$) avec ($f(e_1)$, $f(e_2)$, $f(e_3)$) base de Im f_β) (0.5pt)

   Si $\beta = -3$, on a : dim Im f_{-3} = rg f_{-3} = 2. (0.5pt)

   Comme ($f(e_1)$, $f(e_2)$) est libre ($\begin{vmatrix}3&1\\1&0\end{vmatrix} \neq 0$), c'est donc une base de Im f_{-3}. (0.5pt)

4 4

Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences Semlalia
Département de Mathématiques
Marrakech

Année universitaire : 2013/2014
Filière : SMPC – S2

Contrôle n° 2-Epreuve d'Algèbre II

Durée : 1h 30 (Mercredi 18 Juin 2014)

Exercice 1. L'espace vectoriel $E = IR_2[X]$ est rapporté à sa base canonique $B = (P_0, P_1, P_2)$ avec $P_0 = 1$, $P_1 = X$ et $P_2 = X^2$.
On considère l'endomorphisme $f : E \to E$ défini par : $f(P(X)) = P(X) + (X+1)P'(X)$.

1. Ecrire la matrice A de f relativement à la base B.

Soit $B' = (Q_0, Q_1, Q_2)$ la famille de E définie par : $Q_0 = 1 - X$, $Q_1 = 1 + X^2$ et $Q_2 = 2 - X^2$.

2. Montrer que B' est une base de E.
3. (a) Déterminer la matrice de passage P de B à B' puis calculer P^{-1}.
   (b) Déterminer les coordonnées du vecteur $3 + 4X + X^2$ dans la base B'.
4. (c) Calculer la matrice A' de f relativement à la base B'.
   (d) Soit $Q = 3Q_0 + Q_1 - Q_2 \in E$. Déterminer les coordonnées de f(Q) dans la base B'.

Exercice 2. L'espace vectoriel $E = IR^3$ est muni de sa base canonique.

On considère la matrice $A_a = \begin{pmatrix} 2 & a+2 & a+2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ avec $a \in IR$.

1. Montrer que $P_{A_a}(X) = (2-X)^2(3-X)$.
2. Etudier, suivant les valeurs du paramètre a, la diagonalisabilité de la matrice A_a sur IR.
3. Diagonaliser la matrice A_{-2}.
4. Calculer $(A_{-2})^n$ pour tout $n \in IN^*$.

Exercice 3. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. (i) Calculer le polynôme caractéristique de la matrice A.
   (ii) A est-elle inversible ?
2. Montrer que A n'est pas diagonalisable sur IR.
3. En utilisant le théorème de Cayley- Hamilton :
   (iii) Calculer A^{-1}.
   (iv) Montrer que pour tout $n \in IN^*$, $A^n = r_n A^2 + s_n A + t_n I_3$ où r_n, s_n et t_n sont des réels à déterminer (le calcul de A^n n'est pas demandé dans cette question).

55 5

Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences Semlalia
Département de Mathématiques
Marrakech

Année universitaire : 2013/2014
Filière : SMPC – S2

Corrigé du contrôle 2 d'algèbre II

Exercice 1.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

2. On a : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3$ donc B′ est une base de E.

3. (a) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

   (b) Soit $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ le vecteur des coordonnées de $3 + 4X + X^2$ dans la base B′. On a :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

4. (c) $A' = P^{-1}AP = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 & -6 & 6 \\ -2 & 9 & -6 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

   (d) $f(Q) = A'\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Exercice 2.

1. $P_{A_a}(X) = (2 - X)^2(3 - X)$.

2. A_a admet 2 valeurs propres : 2 (double) et 3 (simple). A_a est donc diagonalisable sur IR ssi $\dim E_2 = 2$.

Calcul de E_2 : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2 \Leftrightarrow \begin{cases} (a+2)(y+z) = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$. Deux cas se dégagent alors :

(i) $a \neq -2$: $E_2 = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$ et A_a n'est donc pas diagonalisable.

(ii) $a = -2$: $E_2 = \text{Vect}\{u, v\}$ avec $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. A_{-2} est donc diagonalisable.

3. Pour diagonaliser A_{-2}, il reste à calculer E_3. On obtient : $E_3 = \text{Vect}\{w\}$ avec $w = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$B = (u, v, w)$ est donc une base de vecteurs propres de A_{-2} et $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice de passage de la base canonique à B. D'où : $P^{-1}A_{-2}P = D$ avec $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

4. On a : $A_{-2} = PDP^{-1}$. On en déduit : $(A_{-2})^n = PD^nP^{-1}$.
Les calculs donnent :

$$D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Il en résulte :}$$

$$(A_{-2})^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 2^n - 3^n & 2^n & 2^n - 3^n \\ -2^n + 3^n & 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

Exercice 3.

1. (i) $P_A(X) = (1 - X)^3$.
   (ii) $\det A = P_A(0) = 1$ donc A est inversible.

2. 1 est une valeur propre triple de A. Le calcul de E_1 donne : $E_1 = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$. D'où $\dim E_1 = 1 \neq 3$ et A n'est donc pas diagonalisable.

4. (iii) On a : $P_A(X) = X^3 - 3X^2 + 3X - 1$. Le théorème de Cayley-Hamilton appliquée à la matrice A donne : $A^3 - 3A^2 + 3A - I_3 = 0$. On en déduit : $A(A^2 - 3A + 3I_3) = I_3$.

D'où : $A^{-1} = A^2 - 3A + 3I_3$.

Le calcul donne : $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(iv) La division euclidienne de X^n par $P_A(X)$ donne :

(1) $X^n = P_A(X)\,Q(X) + r_n X^2 + s_n X + t_n$ où r_n, s_n et t_n sont des réels.

En dérivant deux fois (1), on obtient :

(2) $nX^{n-1} = (P_A(X)\,Q(X))' + 2r_n X + s_n$

(3) $n(n-1)X^{n-2} = (P_A(X)\,Q(X))'' + 2r_n$

Sachant que $(P_A Q)'(1) = (P_A Q)''(1) = 0$, on obtient, en attribuant à X la valeur 1 dans (1), (2) et (3) :

$$\begin{cases} r_n + s_n + t_n = 1 \\ 2r_n + s_n = n \\ 2r_n = n(n-1) \end{cases}.$$

D'où : $r_n = \dfrac{n(n-1)}{2}$, $s_n = n(2-n)$ et $t_n = \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$.

Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences Semlalia
Département de Mathématiques
Marrakech

Année universitaire : 2013/2014
Filière : SMPC – S2

Contrôle de rattrapage-Epreuve d'Algèbre II
Durée : 1h 30 (Mardi 1er Juillet 2014)

Exercice 1. L'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ est muni de sa base canonique.
Pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, on définit le sous-ensemble de E : $F_a = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, ax + y + z = 0\}$.

1. Montrer que F_a est un sous-espace vectoriel de E puis en donner une base et la dimension.
2. Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$ tels que $a \neq b$.
   (a) Déterminer $F_a \cap F_b$.
   (b) A-t-on $E = F_a \oplus F_b$?
   (c) Déterminer $F_a + F_b$.
3. Soit H le sous-espace vectoriel de E défini par : $H = \{(c, 0, 4c) \,/\, c \in \mathbb{R}\}$.
   Montrer que $E = F_4 \oplus H$.

Exercice 2. L'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ est rapporté à sa base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$.
On considère l'endomorphisme f de E défini par sa matrice A relativement à B :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ pour tout $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E$.
2. Déterminer une base de Im f et une base de Ker f.
3. Soit $B' = (u, v, w)$ la famille de E définie par :
   $u = e_2$, $v = (2, 0, m)$ et $w = (m, 1, 1)$ avec $m \in \mathbb{R}$.
   Pour quelles valeurs de m la famille B' est-elle une base de E ?
4. On suppose m= 2.
   (a) Déterminer la matrice de passage P de B à B' puis calculer P^{-1}.
   (b) Calculer la matrice A' de f relativement à la base B'.
   (c) Calculer la matrice $A'' = M(f, B', B)$ de f relativement aux bases B' et B.

Exercice 3. Le C-espace vectoriel $E = \mathbb{C}^3$ est rapporté à sa base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$ avec $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $P_A(X)$ puis en déduire que la matrice A est diagonalisable sur C mais pas sur IR.
2. Déterminer les sous-espaces propres de A (en cas de besoin utiliser la relation $\dfrac{1+i}{-1+i} = -i$).
3. Diagonaliser la matrice A puis calculer A^{401}.

7

Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences Semlalia
Département de Mathématiques
Marrakech

Année universitaire : 2013/2014
Filière : SMPC – S2

Corrigé du contrôle de rattrapage d'Algèbre II 2013/2014

Exercice 1. (6 points)

1. $F_a = \text{Vect}\{(1,-a,0),(0,-1,1)\}$ (ou encore $\text{Vect}\{(1,0,-a),(0,1,-1)\}$).
   F_a est donc un sous-espace vectoriel de E dont une base est $\{(1,-a,0),(0,-1,1)\}$ (1+ 0,5)
   ($\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -a & -1 \end{vmatrix} \neq 0$) et $\dim F_a = 2$.

2. (a) $F_a \cap F_b = \text{Vect}\{(0,1,-1)\}$. (1,5pt)
   (b) F_a et F_b ne sont pas supplémentaires dans E car $F_a \cap F_b \neq \{0_E\}$. (0,5pt)
   (c) On a : $\dim F_a + F_b = \dim F_a + \dim F_b - \dim F_a \cap F_b = 3$. Comme $F_a + F_b$ est un sous-espace vectoriel de E, on en déduit : $E = F_a + F_b$. (1pt)

3. Calcul de $F_4 \cap H$. Soit $u = (c, 0, 4c) \in H$ avec c réel.
   $u \in F_4 \Leftrightarrow 4c + 4c = 0 \Leftrightarrow c = 0$. D'où : $F_4 \cap H = \{0_E\}$. (1pt)
   On a $\dim H = 1$; on en déduit $\dim E = \dim H + \dim F_4$. (0,5pt)
   Conclusion : $E = F_4 \oplus H$.

Exercice 2. (7,5 points)

1. $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x+3y+2z \\ 2x-y-3z \end{pmatrix}$. (1pt)

2. • $\text{Im} f = \text{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$. Donc $\dim \text{Im} f = \text{rg} A$.
   En calculant rg A en utilisant la méthode de Gauss, on abtient rg A = 2. ($f(e_1)$, $f(e_2)$) est par exemple une base de Im f ($f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $f(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$). (1pt)

   • $\text{Ker} f = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$. (1pt)

3. $\det B' = \begin{vmatrix} 0 & 2 & m \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 1 \end{vmatrix} = m^2 - 2$. Donc B' est une base de E ssi : $m \neq \sqrt{2}$ et $m \neq -\sqrt{2}$. (0,5pt)

4. On suppose m = 2.
   (a) $P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1/2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. (0,5pt + 1pt)
   (b) $A' = P^{-1} A P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ -3 & -6 & -3 \\ 4 & 8 & 6 \end{pmatrix}$. (1,5pt)
   (c) Pour déterminer A'', il faut calculer f(u) , f(v) et f(w) sur la base B. La question 1 nous donne :
   $f(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $f(v) = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $f(w) = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$. D'où : $A'' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 7 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. (1pt)

Exercice 3. (7 points)

1. $P_A(X) = (1-X)(1+X^2)$ (0,5pt)
   A admet 3 VP complexes 2 à 2 distinctes : 1 , i et $-i$. A est donc diagonalisable sur C. (0,5pt)
   A n'est pas diagonalisable sur IR car elle admet des VP non réelles. (0,5pt)

2. $E_1 = \text{Vect}\{e_2\}$. (0,5pt)
   $E_i = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ i \end{pmatrix}\right\}$ (= $\text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$) et $E_{-i} = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -i \end{pmatrix}\right\}$ (= $\left\{\begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$). (1pt + 0,5pt)

3. **Diagonalisation de A dans C :** soient les vecteurs de E : $u = e_2$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ i \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -i \end{pmatrix}$.
   B' = (u, v, w) est une base de vecteurs propres de A et $P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -i & i \\ 0 & i & -i \end{pmatrix}$ est la matrice de passage de B à B'. (0,5pt)

On a donc : $(P_1)^{-1} A P_1 = D_1 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&i&0\\0&0&-i\end{pmatrix}$. (0,5pt)

Remarque. Il y a plusieurs possibilités pour la matrice de passage. Voici quelques cas qui vous faciliteront la correction :

$$P_2 = \begin{pmatrix}1&1&0\\-i&i&1\\i&-i&0\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D_2 = \begin{pmatrix}i&0&0\\0&-i&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

$$P_3 = \begin{pmatrix}-i&i&0\\-1&-1&1\\1&1&0\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D_3 = \begin{pmatrix}i&0&0\\0&-i&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

$$P_4 = \begin{pmatrix}0&-i&i\\1&-1&-1\\0&1&1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D_4 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&i&0\\0&0&-i\end{pmatrix}.$$

- Calcul de A^{401}. On a : $A^{401} = P_1 (D_1)^{401} (P_1)^{-1}$. (0,5pt)

Les calculs donnent : $(P_1)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&2&2\\1&0&-i\\1&0&i\end{pmatrix}$. (1pt)

Pour le calcul des autres inverses, on obtient :

$$(P_2)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&-i\\1&0&i\\0&2&2\end{pmatrix} \; ; \; (P_3)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}i&0&1\\-i&0&1\\0&2&2\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (P_4)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&2&2\\i&0&1\\-i&0&1\end{pmatrix}.$$

Comme $(D_1)^{401} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&i^{401}&0\\0&0&(-i)^{401}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&i&0\\0&0&-i\end{pmatrix} = D_1$, on en déduit :

$$A^{401} = P_1 D_1 (P_1)^{-1} = A. \qquad \text{(1pt)}$$

Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences Semlalia
Département de Mathématiques
Marrakech

SMPC
Algèbre II
2012-2013

Contrôle n° 1 - 17/04/2013

EPREUVE D'ALGEBRE-DURÉE 1H30

Exercice 1. On considère la matrice $A_\beta = \begin{pmatrix}1&1&4\\1&2&\beta\\1&3&\beta\end{pmatrix}$ avec $\beta \in \mathbb{R}$.

1. Discuter suivant les valeurs de β l'inversibilité de la matrice A_β.
2. En utilisant la méthode des cofacteurs, calculer $(A_\beta)^{-1}$ lorsqu'elle existe.

Exercice 2. L'ensemble F est-il un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E dans les cas suivants ?

1. $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \{(x,y,z) \in E \,/\, |x| = |y|\}$.
2. $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \{(x,y,z) \in E \,/\, |x| \leq 1\}$.
3. $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \{(x,y) \in E \,/\, y = 2x\} + \{(x,y) \in E \,/\, x = 0\}$.
4. $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $F = \left\{\begin{pmatrix}a & -a\\0 & \sqrt{2}a\end{pmatrix} \,/\, a \in \mathbb{R}\right\}$.
5. $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $F = \{aX^3 + b(X^2 - 1) \,/\, a, b \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 3. On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_2[X]$ rapporté à sa base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$. On considère les trois vecteurs de E : $P_1 = 2 + X$, $P_2 = -1 + X^2$ et $P_3 = 4 + X - 2X^2$. On définit les ensembles suivants :

$$E_1 = \mathrm{Vect}\{P_1, P_2, P_3\} \text{ et } E_2 = \{aX + b(X - X^2) \,/\, a, b \in \mathbb{R}\}.$$

1. Calculer le rang de la famille $\mathcal{S} = (P_1, P_2, P_3)$.
2. En déduire que $E_1 = \mathrm{Vect}\{P_1, P_2\}$ et donner alors la dimension de E_1.
3. Montrer que E_2 est un sous-espace vectoriel de E et en donner une base.
4. Déterminer $E_1 \cap E_2$ et sa dimension.
5. Calculer la dimension de $E_1 + E_2$.
6. En déduire que $E = E_1 + E_2$.

Exercice 4. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les trois vecteurs :

$$u = (1, 1, a), \; v = (1, a, 1) \text{ et } w = (a, 1, 1) \text{ avec } a \in \mathbb{R}.$$

1. Discuter, suivant les valeurs de a, le rang de la famille $\mathcal{B} = (u, v, w)$.
2. On suppose $a = -2$.
   (a) Montrer que $w \in \mathrm{Vect}\{u, v\}$.
   (b) En déduire que $\mathrm{Vect}\{u, v\} = \mathrm{Vect}\{u, w\}$.

SMPC

Corrigé Contrôle n°1 d'algèbre 2 du 17 Avril 2013

Exercice 1.(4 points)

1. $\det A_\beta = 4-\beta$. D'où : A_β est inversible si et seulement si $\beta \neq 4$. 2pts (1 + 1)

2. Pour tout $\beta \neq 4$, on a : $(A_\beta)^{-1} = \frac{1}{4-\beta}\begin{pmatrix} -\beta & 12-\beta & \beta-8 \\ 0 & \beta-4 & 4-\beta \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ 2pts

Exercice 2. (5 points)

1. F n'est pas un s.e.v de E : $(1,-1,0), (1,1,0) \in F$ mais $(1,-1,0)+(1,1,0)=(2,0,0) \notin F$ 1pt

2. F n'est pas un s.e.v de E : $(1,3,0) \in F$ et $2.(1,3,0)=(2,6,0) \notin F$. 1pt

3. F est un s.e.v de E car : $F = \text{Vect}\{(1,2)\} + \text{Vect}\{(0,1)\}$. 1pt

4. F est un s.e.v de E car : $F = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\right\}$. 1pt

5. F est un s.e.v de E car : $F = \text{Vect}\{X^3, X^2-1\}$. 1pt

Exercice 3. (7 points)

1. Pour déterminer le rang de S, on utilise la méthode de Gauss :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans la matrice échelonnée obtenue, on compte 2 lignes non nulles donc $\text{rg}\, S = 2$ 1pt
(on peut aussi montrer que S est liée et que par exemple $\{P_1, P_2\}$ est libre).

2. $\text{rg}\, S = 2$, S est donc liée. Comme $\{P_1, P_2\}$ est libre ($\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$), on en déduit :
$E_1 = \text{Vect}\{P_1, P_2\}$ et $\dim E_1 = 2$. 1pt + 0,5pt
(on peut aussi commencer par déduire de la question 1 que $\dim E_1 = \text{rg}\, S = 2$ puis que $E_1 = \text{Vect}\{P_1, P_2\}$).

3. $E_2 = \text{Vect}\{X, X-X^2\}$ est un s.e.v de E. 0,5pt
Comme $\{X, X-X^2\}$ est libre ($\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$), c'est donc une base de E_2 ($\dim E_2 = 2$) 1pt

4. Après calculs, on obtient : $E_1 \cap E_2 = \text{Vect}\{X+2X^2\}$. 1pt
On en déduit : $\dim E_1 \cap E_2 = 1$. 0,5pt

5. On a : $\dim E_1 + E_2 = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim E_1 \cap E_2 = 2+2-1=3$. 0,5pt

6. Comme $E_1 + E_2$ est un s.e.v de E et de même dimension, il en résulte : $E_1 + E_2 = E$. 1pt

Exercice 4. (4 points)

1. On calcule le rang de $\mathcal{B}$ en utilisant la méthode de Gauss (on peut aussi utiliser les déterminants ou étudier directement l'indépendance linéaire de u, v et w) :

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 1-a & 1-a^2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 \end{pmatrix}.$$ 1pt

Trois cas se dégagent :

$1-a$

(i) Si $2-a-a^2 \neq 0$ c'est à dire $a \neq -2$ et $a \neq 1$: $\text{rg}\,\mathcal{B} = 3$ 0,5pt

(ii) Si $a = 1$, on obtient la matrice échelonnée suivante : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

D'où $\text{rg}\,\mathcal{B} = 1$. 0,5pt

(iii) Si $a = -2$, on obtient la matrice échelonnée suivante : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

D'où $\text{rg}\,\mathcal{B} = 2$. 0,5pt

2. (a) On a : $w = -u-v$. D'où $w \in \text{Vect}\{u, v\}$. 0,5pt

(b) De la question (a) il résulte : $Vect\{u, w\} \subset Vect\{u, v\}$. 0,5pt

On montre de même que l'on a : $v \in Vect\{u, w\}$. D'où l'autre inclusion et finalement l'égalité. 0,5pt

(10)

Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences Semlalia
Département de Mathématiques
Marrakech

SMPC
Algèbre II
2012-2013

Contrôle n° 2 - 10/06/2013

EPREUVE D'ALGEBRE-DURÉE 1H30

Dans tous les exercices, l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est rapporté à sa base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$ avec $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$.

D 1

Exercice 1. On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ et l'application $f : E \longrightarrow E$ définie par :

$$f(x,y,z) = (x+3y, x-2z, 3y+2z)$$

F

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Ecrire la matrice A de f relativement à la base B puis calculer son rang.
3. Soit $B' = (u,v,w)$ la famille de E définie par : $u = (1,1,0)$, $v = (1,1,-1)$ et $w = (0,1,1)$.
   (a) Montrer que B' est une base de E.
   (b) Déterminer la matrice de passage P de B à B' puis calculer P^{-1}.
   (c) Calculer la matrice A' de f relativement à la base B'.
   (d) En déduire les coordonnées des vecteurs $f(u)$, $f(v)$ et $f(w)$ dans la base B'.

D 3 4 tout 4 important *

Exercice 2. L'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ est rapporté à sa base canonique $B' = (1, X, X^2)$.
Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$ l'application linéaire définie par :

$$\begin{cases} f(e_1) = 1 + 2X^2 \\ f(e_2) = -1 - X \\ f(e_3) = X - 2X^2 \end{cases}$$

1. Ecrire la matrice A de f relativement aux bases B et B' puis calculer $f(a,b,c)$ pour tout (a,b,c) de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base de $Ker f$ puis calculer $rg f$.
3. Déterminer une base de $Im f$.

Exercice 3. On considère la matrice $A_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice $A_{\alpha,\beta}$.
2. On suppose $\beta = 1$.
   Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la matrice $A_{\alpha,1}$ n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
3. On suppose $\beta \neq 1$.
   (a) Déterminer les valeurs propres de $A_{\alpha,\beta}$ ainsi que leurs ordres de multiplicité.
   (b) Pour quelle valeur de α la matrice $A_{\alpha,\beta}$ est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?
   (c) Diagonaliser la matrice $A_{0,\beta}$.
   (d) Calculer $(A_{0,\beta})^n$ pour tout $n \in N^*$.

3. $E_2 = \text{Vect}\{X, X-X^2\}$ est un s.e.v de E.

Comme $\{X, X-X^2\}$ est libre ($\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{vmatrix} \neq 0$), c'est donc une base de E_2 (dim $E_2 = 2$) 1pt 0,5pt

4. Après calculs, on obtient : $E_1 \cap E_2 = \text{Vect}\{X+2X^2\}$.

   On en déduit : dim $E_1 \cap E_2 = 1$. 1pt

5. On a : dim $E_1 + E_2$ = dim E_1 + dim E_2 - dim $E_1 \cap E_2 = 2+2-1 = 3$. 0,5pt

6. Comme $E_1 + E_2$ est un s.e.v de E et de même dimension, il en résulte : $E_1 + E_2 = E$. 0,5pt 1pt

Exercice 4. (4 points)

1. On calcule le rang de $\mathcal{B}$ en utilisant la méthode de Gauss (on peut aussi utiliser les déterminants ou étudier directement l'indépendance linéaire de u, v et w) :

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & a\\ 1 & a & 1\\ a & 1 & 1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 1 & a\\ 0 & a-1 & 1-a\\ 0 & 1-a & 1-a^2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 1 & a\\ 0 & a-1 & 1-a\\ 0 & 0 & 2-a-a^2\end{pmatrix}$$ 1pt

Trois cas se dégagent :

(i) Si $2-a-a^2 \neq 0$ c'est à dire $a \neq -2$ et $a \neq 1$: rg $\mathcal{B} = 3$ 0,5pt

(ii) Si $a = 1$, on obtient la matrice échelonnée suivante : $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

D'où rg $\mathcal{B} = 1$. 0,5pt

(iii) Si $a = -2$, on obtient la matrice échelonnée suivante : $\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & -3 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

D'où rg $\mathcal{B} = 2$. 0,5pt

2. (a) On a : $w = -u-v$ .D'où $w \in \text{Vect}\{u, v\}$. 0,5pt

(b) De la question (a) il résulte : $Vect\{u, w\} \subset Vect\{u, v\}$. 0,5pt

On montre de même que l'on a : $v \in Vect\{u, w\}$.D'où l'autre inclusion et finalement l'égalité. 0,5pt

(7)

SMPC ALGEBRE

Corrigé du contrôle 2 (10/06/2013)

Exercice1. (7,5 pts)

1. f est linéaire. 1pt

2. $A = \begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 1 & 0 & -2\\ 0 & 3 & 2\end{pmatrix}$. 1pt

Le rang de A se calcule en utilisant la méthode de Gauss :

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 1 & 0 & -2\\ 0 & 3 & 2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 0 & -3 & -2\\ 0 & 3 & 2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 0 & -3 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

D'où rg A = 2. 1pt

3. a) $\mathcal{B}$ est une base de E car : $\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix} = 1 \neq 0$. 0,5pt

b) $P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$. 0,5pt

Pour calculer P^{-1}, il suffit d'exprimer les vecteurs de $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ en fonction de ceux de $\mathcal{B}'$. Il résulte des calculs : $\begin{cases} e_1 = 2u - v - w\\ e_2 = -u + v + w\\ e_3 = u - v\end{cases}$.

On en déduit $P^{-1} = \begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$. 1pt

c) $A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix}10 & 6 & 13\\ -6 & -2 & -10\\ -3 & -1 & -5\end{pmatrix}$. 1,5pt

d) De la matrice A', il résulte : $\begin{cases} f(u) = 10u - 6v - 3w\\ f(v) = 6u - 2v - w\\ f(w) = 13u - 10v - 5w\end{cases}$. 1pt

(12)

Exercice2. (*4 points*)

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. *0,5pt*

Pour tout $(a, b, c) \in IR^3$, on a : $f(a, b, c) = A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ -b+c \\ 2a-2c \end{pmatrix}$. *1pt*

(ou encore : $f(a, b, c) = (a-b) - (b-c)X + 2(a-c)X^2$)

2. $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Vect}\{(1,1,1)\}$ et $\{(1,1,1)\}$ est une base de Kerf. *1pt*
Il résulte du théorème du rang : $\mathrm{rg}\, f = 3 - \dim \mathrm{Ker} f = 2$. *0,5pt*

3. Comme $\dim \mathrm{Im} f = \mathrm{rg}\, f = 2$, il suffit de trouver 2 vecteurs indépendants de Imf ; par exemple $f(1, 0, 0) = 1 + 2X^2$ et $f(0, 1, 0) = -1 - X$.

$(1+2X^2, -1-X)$ est donc une base de Im f (ou bien $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ est une base de Im f en se rapportant à $\mathcal{B}'$). *1pt*

Exercice 3. (*8,5 points*)

1. $P_{A_{\alpha,\beta}}(X) = (1-X)^2(\beta - X)$. *1pt*
2. On suppose $\beta = 1$.
On a : $P_{A_{\alpha,1}}(X) = (1-X)^3$. 1 est donc une valeur propre triple de $A_{\alpha,1}$.

$A_{\alpha,1}$ est diagonalisable sur IR ssi $\dim E_1 = 3$, c'est-à-dire $E_1 = IR^3$.

Or $A_{\alpha,1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin E_1$. D'où le résultat (on peut aussi calculer E_1 et vérifier que $\dim E_1 < 3$). *1pt*

3. On suppose $\beta \neq 1$.
a) $A_{\alpha,\beta}$ admet 2 valeurs propres réelles : 1 double et β simple. *1pt*
b) $A_{\alpha,\beta}$ est diagonalisable sur IR ssi $\dim E_1 = 2$.

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ \alpha y = 0 \end{cases}$. Deux cas se dégagent alors :

15

(i) $\alpha \neq 0$: $E_1 = \mathrm{Vect}\{e_1\}$ et $A_{\alpha,\beta}$ n'est donc pas diagonalisable. *1pt*

(ii) $\alpha = 0$: $E_1 = \mathrm{Vect}\{e_1, e_2\}$ et $A_{0,\beta}$ est alors diagonalisable. *1pt*

c) Pour diagonaliser $A_{0,\beta}$, il reste à calculer E_β.

On obtient : $E_\beta = \mathrm{Vect}\{e_\beta\}$ avec $e_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \beta-1 \end{pmatrix}$. *1pt*

$\mathcal{B}'' = (e_1, e_2, e_\beta)$ est donc une base de vecteurs propres et

$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \beta-1 \end{pmatrix}$ est la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}''$. *0,5pt*

D'où : $P^{-1} A_{0,\beta} P = D$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$. *0,5pt*

A remarquer qu'un autre choix dans l'ordre des vecteurs de $\mathcal{B}''$ donnerait une autre matrice P et donc une autre matrice D.

d) On a : $A_{0,\beta} = PDP^{-1}$.

On en déduit : $(A_{0,\beta})^n = PD^nP^{-1}$ où $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta^n \end{pmatrix}$. *0,5pt*

Les calculs donnent :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{1-\beta} \\ 0 & 1 & \frac{1}{1-\beta} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\beta-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{\beta-1} \begin{pmatrix} \beta-1 & 0 & -1 \\ 0 & \beta-1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \textit{0,5pt}$$

$$(A_{0,\beta})^n = \frac{1}{\beta-1} \begin{pmatrix} \beta-1 & 0 & \beta^n-1 \\ 0 & \beta-1 & \beta^n-1 \\ 0 & 0 & \beta^n(\beta-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\beta^n-1}{\beta-1} \\ 0 & 1 & \frac{\beta^n-1}{\beta-1} \\ 0 & 0 & \beta^n \end{pmatrix}. \quad \textit{0,5pt}$$

13

Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences Semlalia
Département de Mathématiques
Marrakech

SMPC
Algèbre II
2012-2013

Contrôle de rattrapage - 22/06/2013

EPREUVE D'ALGEBRE-DURÉE 1H30

5

Exercice 1. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est rapporté à sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. On considère les vecteurs suivants :
$u = (1,0,3)$, $v = (0,2,-2)$, $w = (0,1,1)$ et $t = (1,0,1)$. Soient F et G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ définis par : $F = \mathrm{Vect}(u,v)$ et $G = \mathrm{Vect}(w,t)$.

1. Déterminer une base de F et une base de G.
2. Montrer que : $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 3x - y = z\}$ et $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ z = x + y\}$.
3. Déterminer $F \cap G$.
4. F et G sont-ils supplémentaires ?
5. Soit H le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ défini par : $H = \mathrm{Vect}(u)$.
   Montrer que $\mathbb{R}^3 = G \oplus H$.

Exercice 2. L'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_2[X]$ est rapporté à sa base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$.
Soit l'application $f : E \longrightarrow E$ définie par : $f(P) = P(2)X + P'(2)X^2$ pour tout $P \in E$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Ecrire la matrice A de f relativement à la base $\mathcal{B}$.
3. Déterminer une base de $\mathrm{Ker} f$ puis calculer $\mathrm{rg} f$.
4. Déterminer une base de $\mathrm{Im} f$.
5. Soit $\mathcal{B}'$ la famille de E définie par : $\mathcal{B}' = (1, 1-X, (1-X)^2)$.
   (a) Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de E.
   (b) Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ puis calculer P^{-1}.
   (c) Calculer la matrice A' de f relativement à la base $\mathcal{B}'$.
   (d) Soit $P = a + b(1-X) + c(1-X)^2 \in E$ $(a,b,c \in \mathbb{R})$. Déterminer les coordonnées de $f(P)$ dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 3. Soit la matrice $A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-\alpha & \alpha-2 & \alpha \end{pmatrix}$; α étant un paramètre réel.

1. Calculer le polynôme caractéristique $P_{A_\alpha}(X)$ de A_α.
2. Montrer que pour tout $\alpha \notin \{1,2\}$, A_α est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
3. On suppose que $\alpha = 1$. A_1 est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?
4. On suppose que $\alpha = 2$. A_2 est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?
5. On suppose que $\alpha = 0$.
   (a) Diagonaliser A_0.
   (b) Calculer $(A_0)^{2013}$.

14

exosup.com

page facebook

SMPC ALGEBRE II Correction du contrôle de rattrapage (22/6/2013)

Exercice 1.

1. (u, v) est libre donc c'est une base de F ; (w, t) est libre donc c'est une base de G.
2. $F = \{x.u + y.v / x, y \in IR\} = \{(x, 2y, 3x - 2y) / x, y \in IR\} = \{(x, y, z) / 3x - y = z\}$.
   $G = \{x.w + y.t / x, y \in IR\} = \{(y, x, x + y) / x, y \in IR\} = \{(x, y, z) / z = x + y\}$.
3. $F \cap G = \text{Vect}\{(1,1,2)\}$.
4. F + G n'étant donc pas directe, F et G ne sont pas supplémentaires dans IR^3.
5. On vérifie que l'on a : $G \cap H = \{(0,0,0)\}$ et dim G + dim H = 3.

Exercice 2.

1. f est un endomorphisme de E.
2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.
3. Ker f = $\text{Vect}\{4 - 4X + X^2\}$(= $\text{Vect}\{(4,-4,1)\}$) et $\{4 - 4X + X^2\}$ est donc une base de Ker f.On en déduit rg f = 2 (théorème du rang)
4. Comme dim Im f = 2, il suffit de trouver 2 vecteurs indépendants de Im f ; par exemple $f(X) = 2X + X^2$ et $f(X^2) = 4X + 4X^2$.
   ($2X + X^2$, $4X + 4X^2$) est donc une base de Im f.
5. (a) B' est une base de E : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$.

   (b) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   (c) $A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

   (d) On a : $f(P) = A' \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - 2b + 3c \\ -a + 3b - 5c \\ -b + 2c \end{pmatrix}$.

Exercice 3.

1. $P_{A_\alpha}(X) = (X-1)(X-2)(\alpha - X)$.
2. Pour tout $\alpha \notin \{1, 2\}$, la matrice A_α est diagonalisable sur IR car elle admet 3 valeurs propres réelles 2 à 2 distinctes (1, 2 et α)
3. On suppose $\alpha = 1$. A_1 admet 2 valeurs propres : 1 double et 2 simple.
   Pour la valeur propre 1, on obtient $E_1 = \text{Vect}\{(1,1,0)\}$ et dim $E_1 = 1$.
   A_1 n'est donc pas diagonalisable sur IR.
4. On suppose $\alpha = 2$. A_2 admet 2 valeurs propres : 2 double et 1 simple.
   Pour la valeur propre 2, on obtient $E_2 = \text{Vect}\{(0,1,0), (1,0,1)\}$ et dim $E_2 = 2$.
   A_2 est donc diagonalisable sur IR
5. On suppose $\alpha = 0$.

   (a) A_0 admet 3 valeurs propres simples : 0, 1 et 2.
   Il résulte des calculs :
   $E_0 = \text{Vect}\{v_0\}$ avec $v_0 = (1, 1, -1)$; $E_1 = \text{Vect}\{v_1\}$ avec $v_1 = (1, 1, 0)$ et
   $E_2 = \text{Vect}\{v_2\}$ avec $v_2 = (1, 0, 1)$.
   $B = (v_0, v_1, v_2)$ est donc une base de vecteurs propres de A_0 et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
   est la matrice de passage de la base canonique à B.
   D'où : $P^{-1} A_0 P = D$ avec $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

   (b) On a : $(A_0)^{2013} = P D^{2013} P^{-1}$ avec $D^{2013} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{2013} \end{pmatrix}$.
   Les calculs donnent :
   $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $(A_0)^{2013} = \begin{pmatrix} -1 + 2^{2013} & 2 - 2^{2013} & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2^{2013} & -2^{2013} & 0 \end{pmatrix}$.

Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences Semlalia
Département de Mathématiques
Marrakech

Filière SMPC
Algèbre 2
2011/2012

Contrôle 1

Durée : 1h 30 mn

Exercice 1. L'ensemble F est-il un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E dans les cas suivants?

1) $E = IR^2$ et $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in IR^2 \;/\; x < y \right\}$.

2) $E = IR_2[X]$ et $F = \{ P = a_0 + a_1X + a_2X^2 \in IR_2[X] \;/\; a_0 - a_1 + a_2 = 0 \}$.

3) $E = M_2(IR)$ et $F = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ a & 3b \end{pmatrix} \;/\; a,b \in IR \right\}$.

Exercice 2. Soit $E = IR^3$ et soient les ensembles

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a+b \\ b \end{pmatrix} \;/\; a,b \in IR \right\} \quad \text{et} \quad G = \left\{ \begin{pmatrix} c \\ c \\ c \end{pmatrix} \;/\; c \in IR \right\}.$$

1) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
2) Déterminer une base de F, une base G et la dimension de chacun d'eux.
3) Déterminer $F \cap G$ .Que peut-on en conclure ?
4) Les sous-espaces vectoriels F et G sont-ils supplémentaires dans E?

Exercice 3. Soit le IR-espace vectoriel $E = IR_3[X]$ rapporté à sa base canonique $\mathcal{B}_c = (1, X, X^2, X^3)$. On considère les polynômes de E suivants : $P_1 = 1 + 2X - X^3$, $P_2 = 1 + 6X^2 + X^3$, $P_3 = -X + 3X^2 + X^3$ et $P_4 = -1 - 3X + 3X^2 + 2X^3$. Soit la famille $S = (P_1, P_2, P_3, P_4)$.

1) Ecrire la matrice de S par rapport à la base $\mathcal{B}_c$.
2) Calculer le rang de S .Quelle est la dimension de Vect(S) ?
3) En déduire une base de Vect(S) .

Exercice 4. On considère la matrice $A_m = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & m \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ avec $m \in IR$.

En utilisant la **méthode de Gauss** :

1) Discuter suivant les valeurs de m l'inversibilité de la matrice A_m.
2) Calculer $(A_m)^{-1}$ lorsqu'elle existe.

16

Correction du contrôle 1 Algèbre 2 SMPC

Exercice1.

1) $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \notin F$ donc F n'est pas un sev de E.

2) On a : $F = \{\ P = a_0(1+X) + a_1(X+X^2)\ /\ a_0, a_1 \in IR\ \} = \text{Vect}\,(1+X\,,\,X+X^2)$.
F est donc un sev de E. On peut aussi le montrer en utilisant la caractérisation d'un sev.

3) $F = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}0&1\\0&3\end{pmatrix}\right\}$. F est donc un sev de E.

Exercice2.

1) On a : $F = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ et $G = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$. F et G sont donc des sev de E.

2) $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ est libre donc c'est une base de F et dimF = 2.

$\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ est libre donc c'est une base de G et dimG = 1.

$x = y = z$

3) On a : $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in F \cap G \Leftrightarrow \exists a, b \in IR$ tels que : x = y = z = a = a+b = b

D'où : a = b = 0. Il en résulte : $F \cap G = \left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$.

La somme F+G est donc directe.

4) F et G sont supplémentaires dans E : F+G est directe et dimE = dimF + dimG.

Exercice3. 1) La matrice de S par rapport à $\mathcal{B}$, est $A = \begin{pmatrix}1&1&0&-1\\2&0&-1&-3\\0&6&3&3\\-1&1&1&2\end{pmatrix}$.

2) Calcul de rg$S$ par la méthode de Gauss (on échelonne A puis on compte le nombre de pivots non nuls obtenus)

$$\begin{pmatrix}1&1&0&-1\\2&0&-1&-3\\0&6&3&3\\-1&1&1&2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&1&0&-1\\0&-2&-1&-1\\0&6&3&3\\0&2&1&1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&1&0&-1\\0&-2&-1&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Dans la matrice échelonnée obtenue , on compte 2 pivots non nuls donc rg$S$ = 2.
On déduit également : dimVect(S) = rg$S$ = 2.

3) Pour trouver une base de Vect(S) (qui est de dimension2), il suffit de trouver 2 vecteurs indépendants de Vect(S) ; par exemple P_1 et P_2 sont indépendants (vérification facile).
(P_1, P_2) est donc une base de Vect(S).

Exercice 4.

1) La méthode de Gauss appliquée à A_m nous donne :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&m&0&1&0\\-1&0&-1&0&0&1\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&m&0&1&0\\0&1&0&1&0&1\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&m&0&1&0\\0&0&-m&1&-1&1\end{array}\right)$$

Au regard de la $3^{ème}$ ligne, 2 cas se dégagent :

1^{er} cas : Si m = 0 alors A_0 n'est pas inversible (on a une ligne de zéros).
$2^{ème}$ cas : Si $m \neq 0$ alors A_m est inversible et la méthode de Gauss continue à s'appliquer pour le calcul de $(A_m)^{-1}$.

2) Calcul de $(A_m)^{-1}$:
On reprend la méthode de Gauss (en supposant $\underline{m \neq 0}$) :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&m&0&1&0\\0&0&-m&1&-1&1\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&m&0&1&0\\0&0&1&-1/m&1/m&-1/m\end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&(m+1)/m&-1/m&1/m\\0&1&0&1&0&1\\0&0&1&-1/m&1/m&-1/m\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1/m&-1/m&(1-m)/m\\0&1&0&1&0&1\\0&0&1&-1/m&1/m&-1/m\end{array}\right)$$

D'où : $(A_m)^{-1} = \frac{1}{m}\begin{pmatrix}1&-1&1-m\\m&0&m\\-1&1&-1\end{pmatrix}$.

Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences Semlalia
Département de Mathématiques
Marrakech

Filière SMPC
Algèbre 2
2011/2012

Contrôle 1

Durée : 1h 30 mn

Exercice 1. L'ensemble F est-il un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E dans les cas suivants?

1) $E = IR^2$ et $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in IR^2 \, / \, x < y \right\}$.

2) $E = IR_2[X]$ et $F = \{ P = a_0 + a_1X + a_2X^2 \in IR_2[X] \, / \, a_0 - a_1 + a_2 = 0 \}$.

3) $E = \mathcal{M}_2(IR)$ et $F = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ a & 3b \end{pmatrix} \, / \, a,b \in IR \right\}$.

Exercice 2. Soit $E = IR^3$ et soient les ensembles

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a+b \\ b \end{pmatrix} / \, a,b \in IR \right\} \quad \text{et} \quad G = \left\{ \begin{pmatrix} c \\ c \\ c \end{pmatrix} / \, c \in IR \right\}.$$

1) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
2) Déterminer une base de F, une base G et la dimension de chacun d'eux.
3) Déterminer $F \cap G$ .Que peut-on en conclure ?
4) Les sous-espaces vectoriels F et G sont-ils supplémentaires dans E?

Exercice 3. Soit le IR-espace vectoriel $E = IR_3[X]$ rapporté à sa base canonique $\mathcal{B}_c = (1, X, X^2, X^3)$. On considère les polynômes de E suivants :
$P_1 = 1 + 2X - X^3$, $P_2 = 1 + 6X^2 + X^3$, $P_3 = -X + 3X^2 + X^3$ et
$P_4 = -1 - 3X + 3X^2 + 2X^3$. Soit la famille $S = (P_1, P_2, P_3, P_4)$.

1) Ecrire la matrice de S par rapport à la base $\mathcal{B}_c$.
2) Calculer le rang de S .Quelle est la dimension de Vect(S) ?
3) En déduire une base de Vect(S) .

Exercice 4. On considère la matrice $A_m = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & m \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ avec $m \in IR$.

En utilisant la **méthode de Gauss** :

1) Discuter suivant les valeurs de m l'inversibilité de la matrice A_m.
2) Calculer $(A_m)^{-1}$ lorsqu'elle existe.

18

Exercice 1

a) F n'est pas un s.e.v de R^2 car $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \notin F$.

b) F est un s.e.v de R^3 : $F \neq \emptyset$ ($P = 0 \in F$) et on a : $\forall \alpha, \beta \in R$; $\forall P, Q \in F$

$$(\alpha.P + \beta.Q)(0) = \alpha P(0) + \beta Q(0) = 0 \text{ et } (\alpha.P + \beta.Q)(2) = \alpha P(2) + \beta Q(2) = 0 .$$

Donc $\alpha.P + \beta.Q \in F$.

c) F n'est pas un s.e.v de R^3 car : $\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} \in F$, $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \in F$ et $\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} \notin F$.

Exercice 2

1) $F = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\x\end{pmatrix} / x, y \in R \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \right)$. F est donc un s.e.v de R^3.

De même $G = \left\{ \begin{pmatrix}2y\\y\\z\end{pmatrix} / y, z \in R \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right)$. G est donc un s.e.v de R^3.

On peut aussi montrer que F et G sont des s.e.v en utilisant la caractérisation d'un s.e.v.

2) $\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \right\}$ est une base de F car $\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \right\}$ est libre .On en déduit dimF = 2.

De même $\left\{ \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$ est une base de G car $\left\{ \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$ est libre .On en déduit dimG = 2.

3) $F \cap G = \left\{ \begin{pmatrix}2y\\y\\2y\end{pmatrix} / y \in R \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} \right)$.La somme F+G n'est donc pas directe.

4) On a : dim F+G = dimF + dimG - dim $F \cap G$ = 2 + 2 − 1 = 3 . Comme F+G est un s.e.v de R^3 et dim F+G = dim R^3, on en déduit F+G = R^3.

2) Calcul de $\text{rg}S$ par la méthode de Gauss (on échelonne A puis on compte le nombre de pivots non nuls obtenus)

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & -1\\2 & 0 & -1 & -3\\0 & 6 & 3 & 3\\-1 & 1 & 1 & 2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & -1\\0 & -2 & -1 & -1\\0 & 6 & 3 & 3\\0 & 2 & 1 & 1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & -1\\0 & -2 & -1 & -1\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Dans la matrice échelonnée obtenue , on compte 2 pivots non nuls donc $\text{rg}S = 2$.
On déduit également : $\dim\text{Vect}(S) = \text{rg}S = 2$.

3) Pour trouver une base de Vect(S) (qui est de dimension2), il suffit de trouver 2 vecteurs indépendants de Vect(S) ; par exemple P_1 et P_2 sont indépendants (vérification facile). (P_1, P_2) est donc une base de Vect(S).

Exercice 4.

1) La méthode de Gauss appliquée à A_m nous donne :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\0 & 1 & m & 0 & 1 & 0\\-1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\0 & 1 & m & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\0 & 1 & m & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & -m & 1 & -1 & 1\end{array}\right)$$

Au regard de la 3ème ligne, 2 cas se dégagent :

1er cas : Si m = 0 alors A_0 n'est pas inversible (on a une ligne de zéros).

2ème cas : Si $m \neq 0$ alors A_m est inversible et la méthode de Gauss continue à s'appliquer pour le calcul de $(A_m)^{-1}$.

2) Calcul de $(A_m)^{-1}$:

On reprend la méthode de Gauss (en supposant <u>$m \neq 0$</u>) :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\0 & 1 & m & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & -m & 1 & -1 & 1\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\0 & 1 & m & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & -1/m & 1/m & -1/m\end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 0 & (m+1)/m & -1/m & 1/m\\0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\0 & 0 & 1 & -1/m & 1/m & -1/m\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1/m & -1/m & (1-m)/m\\0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\0 & 0 & 1 & -1/m & 1/m & -1/m\end{array}\right)$$

D'où : $(A_m)^{-1} = \dfrac{1}{m}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1-m\\m & 0 & m\\-1 & 1 & -1\end{pmatrix}$.

Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences Semlalia
Département de Mathématiques

Année universitaire 10/11
Filière SMPC
Algèbre 2

Contrôle 1
Durée : 1h30mn

Exercice 1 : L'ensemble F est-il un sous-espace vectoriel de E dans les cas suivants?

a) $E=\mathbb{R}^2$ et $F=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 \;/\; x<y\right\}$;

b) $E=\mathbb{R}_3[X]$ et $F=\{P\in\mathbb{R}_3[X] \;/\; P(0)=P(2)=0\}$;

c) $E=\mathbb{R}^3$ et $F=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \;/\; xz=0\right\}$.

Exercice 2 : Soit $E=\mathbb{R}^3$ et soient les ensembles

$$F=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \;/\; x=z\right\} \quad \text{et} \quad G=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \;/\; x=2y\right\}.$$

1) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
2) Donner une base de F, une base de G et la dimension de chacun d'eux.
3) Déterminer $F\cap G$. La somme $F+G$ est elle directe?
4) Calculer la dimension de $F+G$. En déduire que $\mathbb{R}^3=F+G$.

Exercice 3 : Soient les vecteurs de $\mathbb{R}^4$

$$v_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},\quad v_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix},\quad v_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v_4=\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

et soit $S=(v_1,v_2,v_3,v_4)$.
a) Calculer le rang de S. Quelle est la dimension de $Vect(S)$?
b) Trouver une base de $Vect(S)$.

Exercice 4 : Soit l'application

$$f:\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+y+z \\ y-z \\ 0 \end{pmatrix}. \end{array}$$

1) Montrer que f est linéaire.
2) Déterminer $Ker f$ et en donner une base.

20 20

Correction du contrôle n° 1 d'algèbre 2 (SMPC)

Exercice 1 (4 pts)

1 a) F n'est pas un s.e.v de R^2 car $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \notin F$.

1,5 b) F est un s.e.v de R^3 : $F \neq \emptyset$ ($P = 0 \in F$) et on a : $\forall \alpha, \beta \in R$; $\forall P, Q \in F$

$$(\alpha.P + \beta.Q)(0) = \alpha P(0) + \beta Q(0) = 0 \text{ et } (\alpha.P + \beta.Q)(2) = \alpha P(2) + \beta Q(2) = 0.$$

Donc $\alpha.P + \beta.Q \in F$.

1,5 c) F n'est pas un s.e.v de R^3 car : $\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} \in F$, $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \in F$ et $\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} \notin F$.

Exercice 2 (9,5 pts)

1 1) $F = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\x\end{pmatrix} / x, y \in R\right\} = Vect\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$. F est donc un s.e.v de R^3.

1 De même $G = \left\{\begin{pmatrix}2y\\y\\z\end{pmatrix} / y, z \in R\right\} = Vect\left(\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$. G est donc un s.e.v de R^3.

On peut aussi montrer que F et G sont des s.e.v en utilisant la caractérisation d'un s.e.v.

= 1+0,5 2) $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ est une base de F car $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ est libre. On en déduit $\dim F = 2$.

= 1+0,5 De même $\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ est une base de G car $\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ est libre. On en déduit $\dim G = 2$.

= 1+1 3) $F \cap G = \left\{\begin{pmatrix}2y\\y\\2y\end{pmatrix} / y \in R\right\} = Vect\left(\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\right)$. La somme F+G n'est donc pas directe.

= 1+1,5 4) On a : $\dim F+G = \dim F + \dim G - \dim F \cap G = 2 + 2 - 1 = 3$. Comme F+G est un s.e.v de R^3 et $\dim F+G = \dim R^3$, on en déduit $F+G = R^3$.

Exercice 3 (5 pts)

2,5 a) Pour déterminer le rang de S, on utilise la méthode de Gauss (on échelonne la matrice des coordonnées des vecteurs de S puis on compte le nombre de pivots non nuls)

Etape 0 — Etape 1 — Etape 2

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 3\\ -1 & 3 & 1 & -2\\ 0 & -2 & -1 & -1\\ 2 & -6 & -2 & 4\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 3\\ 0 & 2 & 1 & 1\\ 0 & -2 & -1 & -1\\ 0 & -4 & -2 & -2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 3\\ 0 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

(De l'étape 0 à l'étape 1, on a utilisé les opérations suivantes : $\ell_2 \to \ell_2 + \ell_1$; $\ell_4 \to \ell_4 - 2\ell_1$

de l'étape 1 à l'étape 2 : $\ell'_3 \to \ell'_3 + \ell'_2$; $\ell'_4 \to \ell'_4 + 2\ell'_2$)

Dans la matrice échelonnée obtenue, on compte 2 pivots non nuls donc $rg\, S = 2$.

1 On en déduit également : $\dim Vect(S) = rg S = 2$.

1,5 b) Pour trouver une base de Vect (S) (qui est de dimension 2), il suffit de trouver 2 vecteurs indépendants de Vect (S) ; par exemple v_1 et v_2 sont indépendants ($\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 3\end{vmatrix} \neq 0$).

(v_1, v_2) est donc une base de Vect (S).

Exercice 4 (3 pts)

1,5 1) Soit α, β deux réels et soit $u = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ deux vecteurs de R^3.

$$f(\alpha.u + \beta.v) = \begin{pmatrix}\alpha x + \beta x' + \alpha y + \beta y' + \alpha z + \beta z'\\ \alpha y + \beta y' - (\alpha z + \beta z')\\ 0\end{pmatrix} = \alpha.\begin{pmatrix}x + y + z\\ y - z\\ 0\end{pmatrix} + \beta.\begin{pmatrix}x' + y' + z'\\ y' - z'\\ 0\end{pmatrix} = \alpha.f(u) + \beta.f(v);$$

f est donc linéaire.

1,5 = 1+0,5 2) Détermination de Kerf : $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in Kerf \Leftrightarrow \begin{cases}x + y + z = 0\\ y - z = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = -2z\\ y = z\end{cases}$.

On en déduit : $Kerf = \left\{\begin{pmatrix}-2z\\z\\z\end{pmatrix} / z \in R\right\} = Vect\left\{\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ et $\left\{\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ est une base de Kerf.

0,5 Soit $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base canonique à B'.

1 $D = P^{-1} A P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale semblable à A (ici le calcul de P^{-1} n'est pas nécessaire).

3) Calcul de A^n

0,5 On a : $A^n = (P D P^{-1})^n = P D^n P^{-1}$.

1 0,5

Les calculs donnent : $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1,5 On en déduit : $A^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2.(-2)^n & 1-(-2)^n & 1-(-2)^n \\ 1-(-2)^n & 1+2.(-2)^n & 1-(-2)^n \\ 1-(-2)^n & 1-(-2)^n & 1+2.(-2)^n \end{pmatrix}$.

4) On a $P_A(X) = -X^3 - 3X^2 + 4$

0,5 Le théorème de Cayley – Hamilton implique alors :

$$-A^3 - 3A^2 + 4I_3 = 0. \quad (1)$$

Comme A est inversible ($\det A = P_A(0) = 4 \neq 0$), la relation (1) nous donne :

$$A^{-1} = \underbrace{\frac{1}{4}(A^2 + 3A)}_{0,5} = \underbrace{\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}}_{0,5}.$$

24

Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences Semlalia
Département de Mathématiques

Année Universitaire 10/11
Filière SMPC
Algèbre 2

Contrôle de rattrapage

Durée : 1h 30mn

Exercice 1 : Calculer le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -5 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 : Soit le système linéaire

$$(S) \begin{cases} x + y - 2z = m - 2 \\ x - my + z = 0 \\ 3x + y - 2mz = 2 - m \end{cases} \quad \text{où } m \in \mathbb{R}.$$

1) Montrer que le déterminant Δ de (S) est égal à $2m(m-2)$.
2) Résoudre le système (S) en discutant suivant les valeurs de m.

Exercice 3 : Soit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$ et soit l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + z \\ -y + z \\ x - y \end{pmatrix}.$$

1) Donner la matrice A de f relativement à B.
2) Déterminer $Ker f$ et $\operatorname{Im} f$ en donnant une base de chacun d'eux.
3) Montrer que $P_A(X) = -X(1+X)^2$ et déterminer les valeurs propres de A et leurs ordres.
4) a) Déterminer les sous-espaces propres de A.
b) Montrer que A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
5) En utilisant le théorème de Cayley-Hamilton calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

5

Corrigé du contrôle de rattrapage d'algèbre SMPC 2010-2011

Exercice1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -5 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Méthode de Gauss pour calculer le rang de A .

2

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -5 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & 6 & -14 \\ 0 & -3 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -7 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit : $rg\, A = 3$.

Exercice2. $(S) \begin{cases} x + y - 2z = m - 2 \\ x - my + z = 0 \\ 3x + y - 2mz = 2 - m \end{cases}$

1 — 1. $\Delta = 2m(m-2)$.

2. On a 3 cas :

0,5 — a) $m \neq 0$ et $m \neq 2$: $\Delta \neq 0$ et donc le système (S) est de Cramer . Il admet donc une solution unique :

2

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{2(m-2)(m^2+m-1)}{2m(m-2)} = \frac{m^2+m-1}{m}\ ; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{2(m-2)(m+3)}{2m(m-2)} = \frac{m+3}{m} \text{ et}$$

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{2(m-2)(2m+1)}{2m(m-2)} = \frac{2m+1}{m}.$$

1 — b) $m = 0$: $\Delta = 0$ et $\Delta_x = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$; (S) n'admet donc pas de solutions.

0,5 — c) $m = 2$: $\Delta = \Delta_z = \Delta_y = \Delta_x = 0$ donc le système (S) admet une infinité de solutions .

21

1 $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y + 2z \\ y = z \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z.$

L'ensemble des solutions est donc $S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} / x \in R \right\}$.

<u>Exercice3.</u>

1 1. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1 2. $Kerf = Vect\{u\}$ avec $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\{u\}$ est une base de $Kerf$.

1 Comme $rgf = \dim Imf = 3 - 1 = 2$, on en déduit $Imf = Vect\{v, w\}$ avec $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

0,5 $\{v, w\}$ est une base de Imf (v et w sont indépendants).

1 3. $P_A(X) = -X(X+1)^2$

0,5 A admet 2 valeurs propres réelles : $\lambda_1 = 0$ simple et $\lambda_2 = -1$ double.

0,5 4. a) $E_0 = Kerf = Vect\{u\}$ avec $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1 $AV = -V \Leftrightarrow z = 0$ et $x = y$. D'où $E_{-1} = Vect\{u_1\}$ avec $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

0,5 b) On a : $\dim E_{-1} = 1 < ord(\lambda_2)$ donc A n'est pas diagonalisable sur R.

0,5 5. $P_A(X) = -X^3 - 2X^2 - X$.

De la division euclidienne de X^n par $P_A(X)$, on déduit : $X^n = P_A(X)\,Q(X) + a_n X^2 + b_n X + c_n$ (1)

1 $X = 0 \Rightarrow c_n = 0$.

$X = -1 \Rightarrow a_n - b_n = (-1)^n$.

En dérivant (1) et en remplaçant X par -1, on obtient : $-2a_n + b_n = n(-1)^{n-1}$.

1 Par suite : $a_n = (-1)^n(n-1)$ et $b_n = (-1)^n(n-2)$.

1 D'autre part, l'application de Cayley-Hamilton et l'utilisation de (1) nous donnent :

$$A^n = ((-1)^n(n-1))A^2 + ((-1)^n(n-2))A$$

1,5 Comme $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, on déduit $A^n = (-1)^{n-1}\begin{pmatrix} -n & n-1 & 1 \\ -n+1 & n-2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

20